УДК 519.872:656.073.43

Дубницкий В. Ю., Петренко О. Е.

ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНИЯ СВОЙСТВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Определены свойства производственных функций как математических объектов. Определены ограничения на их параметры, обеспечивающие сохранение ими содержательного значения. Для применения производственных функций в экономическом факторном анализе получены криволинейные интегралы от них по заданным контурам.

Ключевые слова: производственные функции, гессиан, криволинейный интеграл, экономический факторный анализ
Формул: 40. *Библ*.: 11.

Дубницкий Валерий Юрьевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией, Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела Национального банка Украины (пр. Победы, 55, Харьков, 61174, Украина)
Email: valeriy_dubn@mail.ru

Петренко Ольга Евгеньевна – кандидат технических наук, доцент, Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела Национального банка Украины (пр. Победы, 55, Харьков, 61174, Украина)
Email: math@khibs.edu.ua

УДК 519.872:656.073.43

Дубницький В. Ю., Петренко О. Є.

ПЕРЕВІРКА ВИКОНАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ ЯК МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Визначені властивості виробничих функцій як математичних об\'єктів. Визначені обмеження на їх параметри, що забезпечують збереження ними змістовного значення. Для вживання виробничих функцій в економічному факторному аналізі отримані криволінійні інтеграли від них по заданим контурам.

Ключові слова: виробничі функції, гесіан, криволінійний інтеграл, економічний факторний аналіз
Формул: 40. *Бібл*.: 11.

Дубницький Валерій Юрійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач лабораторії, Харківський інститут банківської справи Університету банківської справи Національного банку України (пр. Перемоги, 55, Харків, 61174, Україна)
Email: valeriy_dubn@mail.ru

Петренко Ольга Євгенівна – кандидат технічних наук, доцент, Харківський інститут банківської справи Університету банківської справи Національного банку України (пр. Перемоги, 55, Харків, 61174, Україна)
Email: math@khibs.edu.ua

UDC 519.872:656.073.43

Dubnitskiy V. Y., Petrenko O.

CHECK OF PERFORMANCE OF PROPERTIES OF PRODUCTION FUNCTIONS AS MATHEMATICAL OBJECTS

The article determines properties of production functions as mathematical objects. It identifies limitations of their parameters that provide preservation of meaningful value by them. In order to apply production functions in the economic factor analysis, the article obtained curvilinear integrals from them by the set contours.

Key words: production functions, Hessian, curvilinear integral, economic factor analysis
Formulae: 40. *Bibl*.: 11.

Dubnitskiy Valery Yu. – Candidate of Sciences (Engineering), Senior Research Fellow, Head of the Laboratory, Kharkiv Institute of Banking of the University of Banking of the National Bank of Ukraine (pr. Peremogy, 55, Kharkiv, 61174, Ukraine)
Email: valeriy_dubn@mail.ru

Petrenko O.Ye. – Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Kharkiv Institute of Banking of the University of Banking of the National Bank of Ukraine (pr. Peremogy, 55, Kharkiv, 61174, Ukraine)
Email: math@khibs.edu.ua

Вступление. Производственные функции (ПФ) относят к одному из наиболее известных инструментов экономико-математического моделирования. Их применение наиболее полно рассмотрено в работах [1–7]. В них рассмотрены требования, которым должны удовлетворять математические объекты, называемые производственными функциями. В этих же работах [1–7] в качестве производственных приведены функции, не удовлетворяющие указанным свойствам. Наличие подобных противоречий само по себе требует дополнительного анализа. Это необходимо ещё и потому, что их учёт или игнорирование существенно может сказываться на результатах идентификации этих функций [8; 9].

Анализ литературы. Производственными называют функции нескольких действительных неотрицательных аргументов, связывающие результат производства, измеренный в количественном виде, с количеством использованных ресурсов, затраченных на его достижение. В работах [1–4] описаны наиболее распространённые виды производственных функций и указаны области их применения. Рассмотрим их подробнее. Функцией с фиксированными пропорциями факторов (ПФ Леонтьева) называют функцию вида:

$$Y_1 = \min(x_1 / a_1, x_2 / a_2). \quad (1)$$

Эта функция предназначена для моделирования строго детерминированных технологий, не допускающих отклонения от технологических норм использования ресурсов на единицу продукции. Обычно эту функцию применяют для описания мелкомасштабных или полностью автоматизированных производственных объектов.

ПФ Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y_2 = bx_1^{\alpha} x_2^{\gamma}. \qquad (2)$$

ПФ Кобба-Дугласа –одна из наиболее изученных ПФ. Эту функцию используют для описания среднемасштабных объектов от промышленного объединения до отрасли.

Линейную ПФ вида:

$$Y_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2. \qquad (3)$$

применяют для моделирования крупномасштабных систем, например, крупной отрасли, в которой выпуск продукции является результатом одновременного использования множества различных технологий.

ПФ Аллена:

$$y_4 = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 \qquad (4)$$

используют для описания производственных процессов, в которых чрезмерный рост любого из факторов оказывает отрицательное влияние на объем выпуска. Обычно её используется для описания мелкомасштабных ПС с ограниченными возможностями переработки ресурсов.

ПФ постоянной эластичности замены факторов (ПЭЗ или CES):

$$Y_5 = (a_1 x_1^{\gamma} + a_2 x_2^{\gamma})^{\delta} \qquad (5)$$

применяют в случае отсутствия точной информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и есть основания предполагать, что этот уровень существенно не изменяется при изменении объемов вовлекаемых ресурсов. Функцию ПЭЗ(CES) используют при наличии средств оценивания параметров для моделирования систем любого уровня. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [8].

ПФ с линейной эластичностью замены факторов (LES):

$$Y_6 = x_1^{a0}(a_1 x_1 + a_2 x_2)^{a3} \qquad (6)$$

рекомендуют использовать для описания производственных процессов, у которых возможность замещения вовлекаемых факторов существенно зависит от их пропорций.

Функцию Солоу:

$$Y_7 = (a_1 x_1^{a2} + a_3 x_2^{a4})^{a5} \qquad (7)$$

можно использовать примерно в тех же ситуациях, что и ПФ ПЭЗ, однако предпосылки, лежащие в ее основе, слабее предпосылок ПЭЗ. Рекомендуется эта функция в тех случаях, когда предположение об однородности представляется неоправданным. Этой функцией можно моделировать системы любого масштаба.

Ограниченная функция

$$Y_8 = \min(x_1 / a_1, x_2 / a_2, (a_3 x_1^{a4} + a_5 x_2^{a5})^{a6}), \qquad (8)$$

предназначена для описания двухрежимного производственного процесса, в котором один из режимов характеризуется отсутствием взаимозаменяемости факторов, другой – ненулевой, постоянной, но не известной заранее, величиной эластичности замены.

Многорежимная функция:

$$Y_9 = \prod_{i=1}^{k} (a_{1i} x_1^{a0} + a_{2i} x_2^{a0})^{ai} \qquad (9)$$

используется при описании процессов, в которых уровень отдачи каждой новой единицы ресурса скачкообразно меняется в зависимости от соотношения факторов. Целесообразно применять при наличии априорной информации о числе режимов, а иногда и о ширине «переходной» области между режимами.

ПФ многих технологий:

$$Y_{10} = \sum_{i=1}^{k} \min(x_1 / a_{i1}, x_2 / a_{i2}) \qquad (10)$$

рекомендуется к применению в тех случаях, когда выпуск продукции является результатом одновременного функционирования *k* фиксированных технологий, использующих одни и те же ресурсы.

Если рассматривать ПФ как математический объект, то можно, исходя из содержательного смысла задачи, потребовать выполнение следующих условий существования ПФ.

1. Пусть вид ПФ задан с точностью до параметров, подлежащих определению по данным наблюдений, и имеет вид:

$$y = f(x, y). \qquad (11)$$

2. Пусть ПФ есть функция двух вещественных неотрицательных переменных *x, y*.

Условие 1:

$$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = f(0,0) = 0. \qquad (12)$$

Условие 2: ПФ непрерывна и дифференцируема по каждой переменной, по меньшей мере, дважды.

Условие 3:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ge 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \ge 0. \qquad (13)$$

Условие 4:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \le 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \le 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \le 0. \qquad (14)$$

Условие 5:

$$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y). \qquad (15)$$

Постановка задачи: Проверка выполнения условий (1…5) для функций (1…10).

Изложение полученных результатов. Легко видеть, что для функций Y_1, Y_8, Y_{10} выполнено только Условие 1.

Линейная функция (3) не отвечает условию (12), так как $Y_3(x_1, 0) \neq Y_3(0, x_2) \neq 0$. Это противоречит содержательному требованию, предъявляемому к ПФ, указывающему на невозможность производства при отсутствии хотя бы одного из ресурсов.

Условие (13) заключается в том, что выпуск продукции не может снижаться при увеличении количества используемых ресурсов. Формально это означает соблюдение положительности частных производных ПФ по всем аргументам. Для линейной функции вида (3) это возможно, если коэффициенты при неизвестных будут неотрицательными. В результате, если линейную функцию, заданную уравнением (3), считать производственной, то необходимо наложить ограничения на коэффициенты в виде:

$$a_i \geq 0. \tag{16}$$

Увеличения масштаба производства имеет определенную степень однородности, которая может быть выражена условием (15). Линейная производственная функция (3) имеет первую степень однородности, а это означает, что увеличение масштабов производства возможно без изменения производительности ресурсов.

При росте выпуска продукции может происходить частичное замещение одного вида ресурса другим. А это означает, что график поверхности, описываемой производственной функции, должен быть выпуклым вверх (четвертое условие). Проверяется выполнение этого условия с использованием матрицы Гессе и требует выполнения следующих неравенств:

$$\begin{aligned}&\Delta_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_1^2} < 0, \Delta_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_2^2} < 0, \Delta_3 = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2},\\ &\Delta = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3^2 > 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Для линейной функции (3) значения $\Delta_i = 0, i = 1,2,3,$ $\Delta = 0$, и условие (17) не выполнено для всех значений a_i.

Рассмотрим ПФ Аллена, уравнение которой имеет вид (4), и проверим выполнения условий, позволяющих считать ее производственной функцией. Условие (12) не выполнено в полной мере, так как $Y_4(x_1, 0) \neq Y_4(0, x_2) \neq 0.$

Условие (12) выполняется при определенных ограничениях на коэффициенты a_i уравнения (4), а именно $a_i > 0.$ Рассмотрим данные ограничения:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 x_2 - 2a_1 x_1 \geq 0,\\ &\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_0 x_1 - 2a_2 x_2 \geq 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Используя выражение (18), получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}&a_0 x_2 \geq 2a_1 x_1\\ &a_0 x_1 \geq 2a_2 x_2\end{aligned}. \tag{19}$$

Из неравенств (19), допуская, что $x_i > 0$, $a_i > 0$, получаем следующие ограничения на коэффициенты:

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2a_1} \geq \frac{x_1}{x_2}\\ &a_0 \geq \frac{2a_2 x_2}{x_1} \geq \frac{2a_2}{x_1 / x_2} \geq \frac{2a_2}{a_0 / 2a_1} \geq \frac{4a_1 a_2}{a_0}.\end{aligned} \tag{20}$$

Домножив обе части (20) на a_0, получаем следующее неравенство:

$$a_0^2 \geq 4a_1 a_2. \tag{21}$$

Итак, условие (13) для функции Аллена выполняется, когда $a_i > 0$ и $a_0^2 \geq 4a_1 a_2$. В случаи $a_i < 0$, условие (13) будет выполнено при $a_0^2 \leq 4a_1 a_2$.

Условие однородности (15) для функции Аллена имеет вид:

$$y(\lambda x) = a_0 \lambda x_1 \lambda x_2 - a_1 \lambda^2 x_1 - a_2 \lambda^2 x_2 = \lambda^2 y(x). \tag{22}$$

Степень однородности равна 2, т. е. больше 1, а это означает, что увеличение масштабов производства обеспечивает эффективность ресурсов.

Проверим, при каких ограничениях на параметры выполнено условие выпуклости вверх графика поверхности, заданной уравнением (4). Значения $\Delta_i, i = 1,2,3, \Delta$ при условии $a_i > 0$ принимают следующие значения: $\Delta_1 = -2a_1 < 0, \Delta_2 = -2a_2 < 0, \Delta_3 = a_0, \Delta = 4a_1 a_2 - a_0^2.$ Условие выпуклости вверх выполняется при следующем ограничении:

$$a_0^2 < 4a_1 a_2. \tag{23}$$

Если $a_i < 0$, то условие выпуклости вверх не выполняется ни при каких значениях параметров.

При проведенном анализе ограничений на параметры функции Аллена можно сделать вывод, что условия (21) и (22) противоречат друг другу. Исходя из этого, функция Алена не удовлетворяет условиям (13) и (14). Производственная функция Кобба-Дугласа (2) является самой распространенной из всех производственных функций. Данная функция является мультипликативной и удовлетворяет требованию (12). Частные производные данной функции имеют вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y}{\partial x_1} = b\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\gamma}\\ &\frac{\partial y}{\partial x_2} = b\gamma x_1^{\alpha} x_2^{\gamma-1}.\end{aligned} \tag{24}$$

Условие (13) выполнено для всех значений $\alpha > 0, \gamma > 0.$ Степень однородности функции Кобба – Дугласа равна $\alpha + \gamma$.

Для проверки условия (14) рассмотрим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = b\alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\gamma}\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^{2}} = b\gamma(\gamma - 1) x_1^{\alpha} x_2^{\gamma-2}\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = b\alpha\gamma x_1^{\alpha-1} x_2^{\gamma-1}\end{aligned} \tag{25}$$

Проверим выполнение условия (14) используя главные миноры матрицы Гессе и следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_1^2} < 0, \Delta_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_2^2} < 0, \Delta_3 = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}. \qquad (26)$$
$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3^2 > 0.$$

Из равенств (16, 17) следует, что $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0$, если $\alpha < 1, \gamma < 1$.

Запишем детерминант матрицы Гессе $\Delta = b^2 \alpha (\alpha - 1) \gamma (\gamma - 1) x_1^{2\alpha - 2} x_2^{2\gamma - 2} - b^2 \alpha^2 \gamma^2 x_1^{2\alpha - 2} x_2^{2\gamma - 2} =$

$= b^2 \alpha \gamma x_1^{2\alpha - 2} x_2^{2\gamma - 2} (1 - \alpha - \gamma)$. Учитывая ограничения на параметры α, γ для выполнения условия (13), получаем следующее: $\Delta > 0$, если $1 - \alpha - \gamma > 0$.

Исходя из сказанного выше, функция Кобба – Дугласа будет удовлетворять всем требованиям, которые выдвигаются для производственных функций, при следующем ограничении: $\alpha > 0, \gamma > 0, \alpha + \gamma < 1$.

Проанализированные условия существования относятся к дифференциальным свойствам ПФ. Интегралы от производственных функций используют в практике экономического анализа значительно реже. В работе [3, с. 389–391] приведен пример применения интегральных свойств ПФ для экономического факторного анализа.

Пусть ПФ имеет вид $Y = f(x_1, x_2)$, при условии взаимной независимости переменных. Пусть с учетом фактора времени эта зависимость примет вид $Y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Тогда на интервале

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \infty$$

приращение ΔZ можно, в соответствии с работой [3], представить в виде:

$$\Delta Y^{(u)} = \sum_{i=1}^{n} A_{xi}^{(u)}, \qquad (27)$$

где:

$$Axi = \int_p^q \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} dt, \quad i = 1, 2, \ldots n. \qquad (28)$$

В условии (26) верхний индекс обозначает условное обозначение анализируемой (ПФ), в условии (27) символы p и q обозначают нижнюю и верхнюю границы временного интервала, на котором анализируется соответствующая ПФ.

Примем, что в нашем случае $n = 2$.

В соответствии с работой [3], без ограничения общности примем, что:

$$x_1(t) = bt^{\alpha}, \quad x_2(t) = ct^{\gamma}. \qquad (29)$$

Тогда условие (28), не что иное, как формула для вычисления криволинейного интеграла [9]. Теоретическое обоснование такого метода факторного экономического анализа дано в работах[10; 11].

Для функции Y_3, записанной в виде (3), условие (27) примет вид:

$$\Delta Y^{(3)} = A_{x1}^{(3)} + A_{x2}^{(3)} = a_1 b (t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha}) + a_2 c (t_2^{\gamma} - t_1^{\gamma}). \qquad (30)$$

Для функции Y_4, записанной в виде (4), получим следующие выражения:

$$A_{x1}^{(4)} = a_1 b^2 (p^{2\alpha} - q^{2\gamma}) + \frac{a_0 bc\alpha}{\alpha + \gamma} (q^{\alpha + \gamma} - p^{\alpha + \lambda}), \qquad (31)$$

$$A_{x2}^{(4)} = a_2 c^2 (p^{2\alpha} - q^{2\gamma}) + \frac{a_0 bc\alpha}{\alpha + \gamma} (q^{\alpha + \gamma} - p^{\alpha + \lambda}), \qquad (32)$$

$$\Delta Y^{(4)} = A_{x1}^{(4)} + A_{x2}^{(4)}. \qquad (33)$$

Для функций вида (5)–(9) аналогичные задачи могут быть решены только численными методами.

Для функции вида (5) получим следующие, необходимые в процессе численного интегрирования выражения:

$$A_{x1}^{(5)} = a_1 \alpha \gamma \sigma \int_p^q \frac{\left[a_1 \left(bt^{\alpha} \right)^{\gamma} + a_2 \left(ct^{\lambda} \right)^{\gamma} \right]^{\sigma - 1} \left(ct^{\lambda} \right)^{\gamma}}{t} dt, \qquad (34)$$

$$A_{x2}^{(5)} = a_2 \gamma \lambda \sigma \int_p^q \frac{\left[a_1 \left(bt^{\alpha} \right)^{\gamma} + a_2 \left(ct^{\lambda} \right)^{\gamma} \right]^{\sigma - 1} \left(ct^{\lambda} \right)^{\gamma}}{t} dt. \qquad (35)$$

Для функции вида (6) получим выражение, необходимое для численного интегрирования оценки вкладка фактора x_1 :

$$A_{x1}^{(6)} = \int_p^q \frac{a_0 \alpha \left(ba_1 t^{\alpha} + ca_2 t^{\gamma} \right)^{a_3} (bt^{\alpha})^{a_0}}{t} dt + \int_p^q \frac{a_3 \alpha \left(ba_1 t^{\alpha} + ca_2 t^{\gamma} \right)^{a_3} (bt^{\alpha})^{a_0}}{t} dt -$$
$$- \int_p^q \frac{a_2 c t a_3 \alpha t^{\gamma - 1} \left(ba_1 t^{\alpha} + ca_2 t^{\gamma} \right)^{a_3 - 1} (bt^{\alpha})^{a_0}}{t} dt; \qquad (36)$$

Для этой же функции выражение для оценки вклада фактора x_2 получено в виде:

$$A_{x2}^{(6)} = \frac{a_2 a_3 \left(cq^{\gamma} \right)^{a_0} \left[cq^{\gamma} (a_1 + a_2) \right]^{a_3}}{(a_1 + q)(a_0 + a_3)} - \frac{a_2 a_3 \left(cp^{\gamma} \right)^{a_0} \left[cp^{\gamma} (a_1 + a_2) \right]^{a_3}}{(a_1 + q)(a_0 + a_3)}. \qquad (38)$$

Для ПФ вида (7) получим условия (28) в виде:

$$A_{x1}^{(7)} = a_1 a_2 a_5 \alpha \int_p^q \frac{\left[a_1 \left(bt^{\alpha} \right)^{a_2} + a_3 \left(ct^{\gamma} \right)^{a_4} \right]^{a_5 - 1} \left(bt^{\alpha} \right)^{a_2}}{t} dt, \qquad (39)$$

$$A_{x2}^{(7)} = a_3 a_4 a_5 \gamma \int_p^q \frac{\left[a_1 \left(bt^{\alpha} \right)^{a_2} + a_3 \left(ct^{\gamma} \right)^{a_4} \right]^{a_5 - 1} \left(ct^{\gamma} \right)^{a_4}}{t} dt. \qquad (40)$$

Полученные результаты могут быть использованы в следующих случаях: при формулировании ограничений в процессе идентификации производственных функций и при проведении экономического факторного анализа с их применением.

Выводы

1. Поставлена и частично решена задача определения свойств производственных функций как математических объектов.

2. Определены ограничения на параметры производственных функций, обеспечивающие сохранение содержательного смысла задачи.

3. Для применения производственных функций в экономическом факторном анализе получены их криволинейные интегралы по заданным контурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов В. А. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике / А. В. Бессонов // Анализ динамики российской переходной экономики / А. В. Бессонов, С. В. Цухло. – М. : Институт экономики переходного периода, 2002. – С. 5–89.
2. Клейнер Б. Г. Производственные функции : Теория, методы, применение / Б. Г. Клейнер. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
3. Салманов О. Н Математическая экономика с применением Mathcad и Excel / О. Н. Салманов. – СПб : БХВ-Петербург, 2003. – 464 с.
4. Математика в экономике: учебник [в 2 ч.]. Ч. 2. / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцева, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. – М. : Финансы и статистика,2000. – 376 с.
5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М. : Издательство «Айрис-Пресс», 2002. – 576 с.
6. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных, Ю. Н. / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, Издательство «ДИС», 1997. – 368 с.
7. Замков О. О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе : курс лекций / О. О. Замков. – М. : ГУ ВШЭ, 2001. – 122 с.
8. Иванилов Ю. П. Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, В. А. Лотов. – М. : Наука, 1979. – 304 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа : [в 2 т]. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – 463 с.
10. Баканов М. І. Економічний аналіз : Теорія, історія, сучасний стан, перспективи / М. І. Баканов, А. Н. Кашаев, А. Д. Шеремет. – М. : Фінанси, 1976. – 264 с.
11. Блюмин С. Л. Экономический факторный анализ : монография / С. Л. Блюмин, В. Ф. Суханов, С. В. Чеботарёв. – Липецк : ЛЭГИ, 2004. – 148 с.

REFERENCES

Bessonov, A. V. «Problemy postroeniia proizvodstvennykh funktsiy v rossiyskoy perekhodnoy ekonomike» [Problems of construction of the production functions in the Russian transition economy]. In Analiz dinamiki rossiyskoy perekhodnoy ekonomiki, 5–89. Moscow: Institut ekonomiki perekhodnogo perioda, 2002.

Bakanov, M. I., Kashaev, A. N., and Sheremet, A. D. Ekonomichnyi analiz : Teoriia, istoriia, suchasnyi stan, perspektyvy [Economic analysis: theory, history, current status and prospects]. Moscow: Finansy, 1976.

Bliumin, S. L., Sukhanov, V. F., and Chebotarёv, S. V. Ekonomicheskiy faktornyy analiz [ENGLISH_RU Экономический факторный анализ]. Lipetsk: LEGI, 2004.

Fikhtengolts, G. M. Osnovy matematicheskogo analiza [ENGLISH_RU Основы математического анализа]. Moscow: Nauka, 1968.

Intrilligator, M. Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaia teoriia [Mathematical optimization methods and economic theory.]. Moscow: Ayris-Press, 2002.

Ivanilov, Yu. P., and Lotov, V. A. Matematicheskie modeli v ekonomike [Mathematical models of the economy]. Moscow: Nauka, 1979.

Kleyner, B. G. Proizvodstvennye funktsii : Teoriia, metody, primenenie [Production functions: Theory, methods and application]. Moscow: Finansy i statistika, 1986.

Solodovnikov, A. S., Babaytseva, V. A., and Brailov, A. V.Matematika v ekonomike [Mathematics in economics.]. Moscow: Finansy i statistika, 2000.

Salmanov, O. N. Matematicheskaia ekonomika s primeneniem Mathcad i Excel [Mathematical economics using Mathcad and Exel]. SPb: BKhV-Peterburg, 2003.

Zamkov, O. O. Ekonometricheskie metody v makroekonomicheskom analize [Econometric methods in macroeconomic analysis]. Moscow: GU VShE, 2001.