УДК 510.217

ГИБКАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ СИСТЕМА С ПЕРЕНАЛАДКОЙ, НЕНАДЕЖНЫМ ОБОРУДОВАНИЕМ, ВОССТАНОВЛЕНИЕМ И ПРОФИЛАКТИКОЙ

МЕДВЕДЕВА Марина Ивановна

кандидат физико-математических наук, доцент

На современном этапе развития экономических отношений, когда имеет место жесткая конкуренция производителей, успех предприятия во многом зависит от его способности быстро реагировать на изменения как в сфере снабжения, так и в сфере потребления. В связи с этим большое внимание уделяется гибкости технологического оборудования автоматизированного производства, что позволяет быстро, после непродолжительной переналадки оборудования, переходить от производства одного вида продукции к другому [1]. Способность производственно-логистической системы к обновлению продукции отражает ассортиментная гибкость. Ее основными характеристиками являются сроки и стоимость подготовки производства нового наименования деталей (полуфабрикатов) или нового комплекса логистических операций. Показателем ассортиментной гибкости так же является и максимальный коэффициент обновления продукции или комплекса логистических операций, при котором функционирование производственно-логистической системы остается экономически эффективным.

Однако процесс функционирования любого оборудования тесно связан с вопросом учета возможности выхода из строя в процессе работы обслуживающих приборов. При этом, как известно, обслуживающие оборудование может выходить из строя либо только во время работы, либо неисправность может возникнуть как во время работы, так и во время простоя, т. е. в нерабочем состоянии. Таким образом, одной из важнейших задач стабильного функционирования системы является задача оценки надежности оборудования. Под надежностью понимают способность прибора обеспечивать во времени значения установленных показателей качества в заданных условиях эксплуатации. Она отражает влияние на работоспособность системы, главным образом, внутрисистемных факторов – случайных отказов техники, вызываемых физико-химическими процессами старения оборудования, дефектами технологии ее изготовления или ошибками обслуживающего персонала. При анализе надежности оборудования возникает вопрос о проведении его профилактического и ремонтного обслуживания. Поэтому эффективность основного производства зависит от эффективной деятельности тех служб, задачей которых является обеспечение работоспособного состояния оборудования с минимальными затратами. В связи с эти возникает вопрос о ремонтном аутсорсинге, т. е. передаче обслуживания и ремонта оборудования предприятия специалистам внешней компании. Ремонтный аутсорсинг позволяет предприятию увеличить гибкость производства, адаптироваться к изменениям рынка, увеличить мобильность ресурсов, как производственных, так и трудовых и сосредоточиться на основном производстве.

Все это требует построения ряда моделей, описывающих производственно-логистическую систему и выбора наиболее оптимальной модели функционирования системы. С точки зрения теории управляемых систем массового облуживания анализу производственных систем с ненадежным оборудованием посвящено большое число работ. Так, в работе [2] рассматриваются классические системы массового обслуживания с ненадежным оборудованием. В работе [3] рассмотрена система с переналадкой в начале периода занятости, ненадежным оборудованием, выходящим из строя в любой момент времени и дообслуживанием требований, находящихся на приборе, вышедшем из строя. В [4] исследована система с переналадкой, в которой оборудование может выходить из строя только в рабочем состоянии и после восстановления система готова к обслуживанию новых требований.

В данной работе рассматривается модель системы массового обслуживания с переналадкой и ненадежным прибором, выходящим из строя только в рабочем состоянии и потерей требования, которое находилось на обслуживании до момента выхода прибора из строя. При этом после восстановления оборудования вновь требуется его переналадка. Решается задача определения характеристик заданной системы, что позволяет оптимальным образом управлять потоками сырья, запасных частей и материалов, а так же минимизировать издержки хранения материальных ресурсов.

Предположим, что производственно-экономическая система описывается одноканальной системой массового обслуживания разомкнутого типа с простейшим входным потоком интенсивности $\lambda > 0$. Длительность производственного цикла на изготовление каждой единицы изделий (в дальнейшем будем называть его временем обработки изделия или временем обслуживания η) имеет показательное распределение с параметром $\mu > 0$. После окончания обслуживания всех заказов, находящихся в системе, оборудование немедленно отключается и переходит в состояние «свободен-неготов». При поступлении новых заказов оно сначала производит переналадку на выпуск новой партии изделий, а затем начинает выполнять поступившие заказы. Длительность переналадки имеет показательный закон распределения с параметром $\nu > 0$.

Предположим также, что оборудование может выходить из строя только находясь в рабочем состоянии, т. е. во время выполнения заказа. Если в момент требования в системе была заявка, то она теряется. Обслуживание оборудования осуществляют две бригады: одна занимается только переналадкой, вторая – профилактикой и ремонтом. Как только система освобождается от требований, немедленно начинается профилактика, длительность которой имеет показательный закон распределения с параметром ψ_1. Время ремонта или время восстановления прибора имеет показательный закон распределения с параметром $\psi_2 > 0$. После восстановления, если в системе есть заявки, требуется переналадка оборудования. Если в системе нет заявок, то после восстановления прибор переходит в состояние «свободен-неготов».

Случайный процесс поступления заявок и их обслуживание может быть описан следующими возможными состояниями:

$(0, k)$ – прибор вышел из строя и восстанавливается, в системе $k \ge 0$ требований;

$(1, 0)$ – прибор свободен – неготов;

$(1, k)$ – прибор работает и в системе $k \ge 1$ требований;

$(0^*, k)$ – означает, что прибор находится в состоянии переналадки и в системе $k \ge 1$ требований;

$(2, 0^*, k)$ – проводится переналадка оборудования и в системе $k \ge 1$ требований;

$(2, k)$ – одновременно проводится профилактика и переналадка оборудования и в системе $k \ge 0$ требований.

Для определения характеристик системы – распределение совместных вероятностей того, что оборудование находится в определенном состоянии (переналадка, профилактика, восстановление или работа) и в системе имеется определенное количество требований – рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi(t)$, который описывает состояние системы в момент времени t. Фазовое пространство процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$E = \{(0, k), (1, k), (2, k), k \ge 0;$$
$$(0^*, l), (2, 0^*, l), l \ge 1\}.$$

Пусть существуют стационарные вероятности состояний процесса $\xi(t)$:

$$P_{ik} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (i, k)\},\ i = 0,1,2;\ k \ge 0,$$

$$P_{0^*k} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (0^*, k)\},\ k \ge 1,$$

$$P_{20^*k} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (20^*, k)\},\ k \ge 1.$$

Граф состояний описанной системы имеет вид (рис. 1).

Используя граф состояний процесса $\xi(t)$, составляем систему бесконечных алгебраических уравнений для вероятностей P_{ik}. Итак, имеем следующие системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda + \upsilon)P_{0^*1} + \lambda P_{10} + \psi_1 P_{20^*1} = 0 \\ -(\lambda + \upsilon)P_{0^*2} + \lambda P_{0^*1} + \psi_1 P_{20^*2} = 0 \\ -(\lambda + \upsilon)P_{0^*k} + \lambda P_{0^*,k-1} + \psi_1 P_{20^*k} = 0, k \ge 2 \end{cases} \quad (1)$$

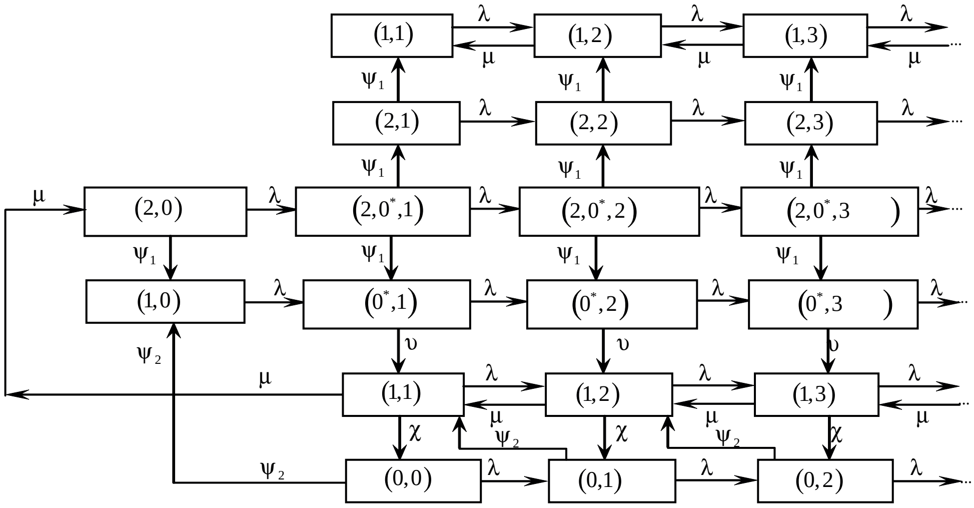

Рис. 1. Граф состояний системы массового обслуживания с ненадежным оборудованием

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_2)P_{00}+\chi P_{11}=0 \\ -(\lambda+\psi_2)P_{0k}+\lambda P_{0,k-1}+\chi P_{1,k+1}=0,\ k\ge 2 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} -\lambda P_{10}+\psi_1 P_{20}+\psi_2 P_{00}=0, \\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{11}+\upsilon P_{0^*1}+\mu P_{12}+\psi_1 P_{21}=0, \\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{1k}+\lambda P_{1,k-1}+\mu P_{1,k+1}+\upsilon P_{0^*k}+ \\ +\psi_1 P_{2k}=0,\ k\ge 2. \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_1)P_{20}+\mu P_{11}=0 \\ -(\lambda+\psi_1)P_{21}+\upsilon P_{20^*1}=0 \\ -(\lambda+\psi_1)P_{2k}+\upsilon P_{20^*k}+\lambda P_{2,k-1}=0,\ k\ge 2 \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_1+\nu)P_{20^*1}+\lambda P_{20}=0 \\ -(\lambda+\upsilon+\psi_1)P_{20^*2}+\lambda P_{20^*1}=0 \\ -(\lambda+\upsilon+\psi_1)P_{20^*k}+\lambda P_{20^*k-1}=0,\ k\ge 2 \end{cases} \qquad (5)$$

Для решения систем (1) – (5) введем производящие функции следующего вида:

$$a_0(z)=\sum_{k\ge 0}P_{0k}z^k,\quad a_0^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{0^*k}z^k,$$

$$a_1(z)=\sum_{k\ge 0}P_{1k}z^k$$

$$a_2(z)=\sum_{k\ge 0}P_{2k}z^k,\quad a_2^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{20^*k}z^k.$$

Умножаем уравнения системы (1) соответственно на $z^1, z^2, z^3,\ldots$ и складываем. Получаем уравнение

$$(\rho+\delta-\rho z)a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)=\rho z P_{10}, \qquad (6)$$

где $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu},\ \ \beta_1=\dfrac{\psi_1}{\mu},\ \ \delta=\dfrac{\upsilon}{\mu}.$

Аналогично из систем бесконечных линейных уравнений (2)–(5) получаем

$$z(\rho+\beta_2-\rho z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10}. \qquad (7)$$

где $\gamma=\dfrac{\chi}{\mu}$

Из (3) легко выводим следующее соотношение

$$(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)=$$
$$=(\rho z^2-z(1+\gamma)+1)P_{10}+zP_{11}-\beta_2 z P_{00}, \qquad (8)$$

$$(\rho z-\rho-\beta_1)a_2(z)+\delta a_2^*(z)=\rho z P_{20}-P_{11}. \qquad (9)$$

$$a_2^*(z)=\frac{\rho z P_{20}}{\rho+\delta+\beta_1-\rho z} \qquad (10)$$

Выражения (6)–(10) содержат неизвестные вероятности P_{10}, P_{11} и P_{20}. Выразим у вероятности P_{00}, P_{11} и P_{20} через P_{20}. Для этого составим систему из первых уравнений систем (2), (3), (4):

$$\begin{cases} -(\rho+\beta_2)P_{00}+\gamma P_{11}=0 \\ -\rho P_{10}+\beta_1 P_{20}+\beta_2 P_{00}=0, \\ -(\rho+\beta_1)P_{20}+P_{11}=0 \end{cases} \qquad (11)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений, введем обозначение

$$C=\frac{\rho(\rho+\beta_2)}{\beta_1(\rho+\beta_2)+\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)}. \qquad (13)$$

Тогда несложно показать, что решение системы (11) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{cases} P_{11}=C(\rho+\beta_1)P_{10}, \\ P_{00}=\gamma C(\rho+\beta_1)P_{10}, \\ P_{20}=C(\rho+\beta_2)P_{10}. \end{cases}$$

Найденные значения вероятностей P_{11}, P_{00}, P_{20} подставляем в равенства (6), (8)–(10). Соответственно получаем

$$(\rho+\delta-\rho z)a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)-\beta_2 a_0 \nu = \\ =(\rho z - C\gamma\beta_2(\rho+\beta_1))P_{10}, \quad (15)$$

$$(\rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)(\ )+1)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)= \\ =[(\rho z^2 - z(1+\gamma)(\ )+1)+Cz(\rho+\beta_1)\cdot(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2)]P_{10}. \quad (16)$$

$$a_2(z)=C(\rho+\beta_2)P_{10}-\frac{\delta a_2^*(z)}{\rho z-\rho-\beta_1} \quad (17)$$

и

$$a_2^*(z)=\frac{C\rho z(\rho+\beta_2)P_{10}}{\rho+\delta+\beta_1-\rho z}. \quad (18)$$

Из равенств (7), (15) и (16) составляем новую систему, решение которой позволит выразить производящие функции $a_0(z)$, $a^*_0(z)$ и $a_1(z)$ через одну неизвестную вероятность $P_{10.}$

$$\begin{cases} z(\rho+\beta_2-\rho z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10}, \\ (\rho+\delta-\rho z)a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)-\beta_2 a_0(z)= \\ (\rho z - C\gamma\beta_2(\rho+\beta_1))P_{10}, \\ \left(\rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)+1\right)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)= \\ =[\rho z^2 - z(1+\gamma)+1+Cz(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2)]P_{10}. \end{cases} \quad (19)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений, введем следующие обозначения

$$d_1(z)=z(\rho+\beta_2-\rho z),$$

$$d_2(z)=\rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)+1,$$

$$d_3(z)=\rho+\delta-\rho z,$$

$$d_4(z)=\beta_1 a_2^*(z)+(\rho z - C\gamma\beta_2(\rho+\beta_1))P_{10},$$

$$d_5(z)=[\rho z^2 - z(1+\gamma)+1+Cz(\rho+\beta_1)\cdot \\ \cdot(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2)]P_{10}-\beta_1 z a_2(z).$$

В новых обозначениях система линейных уравнений (19) принимает вид

$$\begin{cases} d_1(z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10}, \\ d_2(z)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)=d_5(z), \\ d_3(z)a_0^*(z)-\beta_2 a_0(z)=d_4(z). \end{cases} \quad (20)$$

Несложно проверить, что решение системы (20) имеет вид:

$$a_0(z)=\frac{\gamma(d_3(z)\cdot d_5(z)-d_2(z)d_3(z)P_{10}-\delta z d_4(z))}{d_1(z)d_2(z)d_3(z)+\gamma\beta_2\delta z},$$

$$a_1(z)=\frac{d_1(z)d_3(z)d_5(z)+\gamma\beta_2\delta z P_{10}-\delta z d_1(z)d_4(z)}{d_1(z)d_2(z)d_3(z)+\gamma\beta_2\delta z},$$

$$a_0^*(z)=\frac{d_1(z)d_2(z)d_4(z)+\gamma\beta_2 d_5(z)-\gamma\beta_2 d_2(z)P_{10}}{d_1(z)d_2(z)d_3(z)+\gamma\beta_2\delta z}.$$

Таким образом, все производящие функции выражены через одну стационарную вероятность P10. Для того, чтобы найти неизвестную вероятность P10, воспользуемся условием нормировки вида

$$a_0(1)+a_0^*(1)+a_1(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1.$$

Подставив в равенства (17) и (18) значение $z = 1$, соответственно находим

$$a_2(1)=C(\rho+\beta_2)\left(1+\frac{\delta\rho}{\beta_1(\delta+\beta_1)}\right)P_{10}$$

и $a_2^*(1)=\dfrac{C\rho(\rho+\beta_2)}{\delta+\beta_1}P_{10}.$

Из первого уравнения системы (20) при $z = 1$ получаем

$$a_1(1)=P_{10}+\frac{\beta_2}{\gamma}a_0(1).$$

Из третьего уравнения системы (20) следует, что

$$a_0^*(1)=\frac{d_4(1)}{\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}a_0(1).$$

Несложно показать, что $d_1(1)=\beta_2$; $d_2(1)=-\gamma$; $d_3(1)=\delta$; $d_4(1)=\beta_1 a_2^*(1)+(\rho-C\lambda\beta_2(\rho+\beta_1))P_{10}$; $d_5(1)=d_4(1)-\gamma P_{10}$.

Тогда условие нормировки принимает вид

$$P_{10}+\frac{d_4(1)}{\delta}+\left(1+\frac{\beta_2}{\gamma}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)a_0(1)+ \\ +a_2(1)+a_2^*(1)=1.$$

Несложно показать, что

$$a_0(1)=-\frac{\delta\rho\gamma\left[P_{10}+\frac{d_4}{\delta}+a_2^*(1)+a_2(1)\right]}{\rho(\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma))-\beta_2\delta(1+\gamma)}. \quad (21)$$

Из равенства (22) получаем условие существования стационарных вероятностей состояний системы, а именно

$$\rho<\frac{\beta_2\delta(1+\gamma)}{\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma)}. \quad (22)$$

Подставляем в условие нормировки равенство (21):

$$\left[P_{10}+\frac{d_4(1)}{\delta}+a_2(1)+a_2^*(1)\right]+\frac{\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma)}{\delta\gamma}\cdot \\ \cdot\frac{\gamma\cdot\delta\rho\left[P_{10}+\frac{d_4}{\delta}+a_2^*(1)+a_2(1)\right]}{\rho(\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma))-\beta_2\delta(1+\gamma)}=1.$$

Наконец, подставив в последнее равенство найденные значения производящих функций $a_2(1)$ и $a_2^*(1)$, получаем

$$BP_0+B\cdot KP_{10}=1,$$

где

$$B=\frac{\beta_1(\delta+\beta_1)(\delta+C(\rho+\beta_2))+C(\rho+\beta_2)(\delta^2+\beta_1^2+\beta_1\delta)}{\beta_1(\delta+\beta_1)}$$

и $$K=\frac{\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma)}{\rho(\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma))-\beta_2\delta(1+\gamma)}.$$

Следовательно,

$$P_{10}=\frac{1}{B(1+K)}.$$

Таким образом, найдены производящие функции вероятностей состояний системы и необходимое условие (22) существования стационарного распределения вероятностей состояний рассмотренной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Промышленная логистика. Логистико-ориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной среде/ И. Н. Омельченко, А. А. Колобов, А. Ю. Ермаков, А.В. Киреев. Под ред. А. А. Колобова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 204 с.
2. Демьянчук В. С. Надежность обслуживаемых радиоэлектронных систем/ В. С. Демьянчук, С. М. Броди. – К.: Вища школа, 1976. – 160 с.
3. Медведева М. И. Об одном подходе к определению оптимальной партии товара с учетом ненадежности оборудования/ Н. В. Румянцев, М. И. Медведева // Вісн. Донец. національного ун-ту. Сер. В. – Економіка і право. Спецвипуск. – Т. 2. – Донецьк: 2006. – С. 24–31.
4. Медведева М. И. Исследование системы обслуживания с ненадежным прибором и переналадкой в начале периода занятости / Н. В. Румянцев, М. И. Медведева // Науковий журнал «Бізнес Інформ», № 7(1), 2011. – Х.: ФОП Александрова К. М.; ВД «ИНЖЕК», 2011. – С. 10–13.